

# カーブにおける鉄道車両の脱線速度

石田博樹 (長岡工業高等専門学校)

## 緒言

2005年4月25日の午前9時19分頃、JR福知山線の尼崎付近で電車が脱線転覆し、死者107名を含む656名もが死傷する大惨事が起きた。その電車の脱線の原因については、今までにいろいろな分野で様々な推測がなされている。カーブする線路を高速で走る鉄道車両に対してどのような力が働き、さらに、車両の脱線や転覆に至るまでに、その力がどのように作用するのであろうか。

鉄道工学の技術者や研究者でなければ、車両の構造や、レールと車輪との間の詳細な力学的作用などについては、誰にとっても情報不足である。ここでは、それらの詳細な情報と実験事実については専門家に譲ることにして、カーブする線路上を走る車両に働く力と車両の挙動の概略を通常の初等力学の範囲で考察してみよう。

## 単純化モデルによる検討

カーブにおいて車両に働く力を図1に示す。車輪には線路の内側に接するフランジがついているために、通常は、レール上の車両の横滑りは簡単には起きないが、カーブにおける遠心力により、車両が外側へ滑り始める時の限界速度  $V_s$  を求めてみよう。左右の車輪におけるレール面との接触点の間隔は、レールの間隔よりも通常は6~7cmほど長いが、本稿ではそれを無視した。しかし、計算結果には大きな違いは生じない。車両の速度を  $V$  とすると、図1における力のつり合いから、車両が外側へ滑り始めるのは以下の式(1)と(2)が成り立つ時である。

$$f = m \frac{V^2}{r} \dots\dots (1)$$

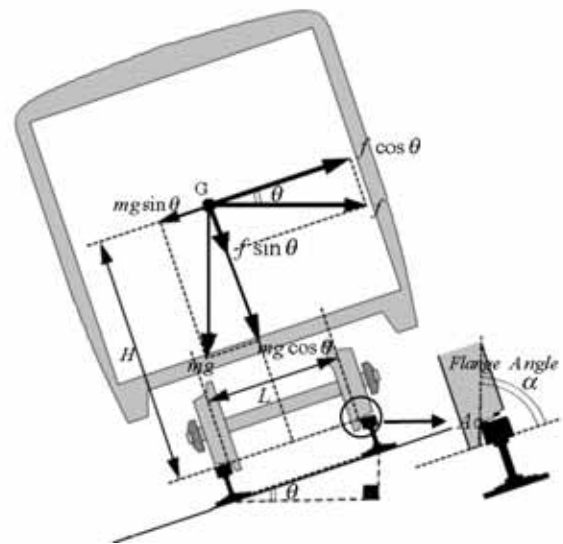


図1 カーブにおいて車両に働く力

$f$ : カーブにおいて車両に働く遠心力,  $m$ : 乗客を含む車両の質量,  $G$ : 乗客を含む車両の重心,  $\mu$ : レールと車輪との接触における摩擦係数,  $r$ : カーブにおける線路の曲率半径,  $\theta$ : カーブにおける線路の内軌と外軌の高低差(カント)による傾斜角度,  $H$ : レール面から車両の重心までの高さ,  $L$ : レール(線路)の間隔,  $g$ : 重力加速度,  $\alpha$ : 車輪のフランジ角度

$$f \cos \theta \geq mg \sin \theta + \mu(mg \cos \theta + f \sin \theta) \dots\dots (2)$$

式(2)において、等号が成り立つ時の速度が限界速度  $V_s$  であるから、

$$V_s = \sqrt{gr \left( \frac{\tan \theta + \mu}{1 - \mu \tan \theta} \right)} \dots\dots (3)$$

線路の内軌と外軌が水平な地面にある(即ち、カントがゼロ)ならば、 $\tan \theta = 0$  により、 $V_S$  は以下の式(4)になる。

$$V_S = \sqrt{\mu gr} \dots\dots (4)$$

即ち、水平地面においては、遠心力によって車両がすべる限界速度は線路の曲率半径の平方根に比例する。

次に、外軌側車輪のフランジと外軌側レールの肩との接点 A を中心として車両が外側へ傾く(内軌側の車輪が浮き上がる)時の車両速度を求めてみよう。図1のA点を中心とするモーメントのつり合いを考慮すると、内軌側の車輪が浮き上がるのは次の式(5)が成り立つ時である。

$$f \cos \theta \times H \geq mg \sin \theta \times H + (mg \cos \theta + f \sin \theta) \times \frac{L}{2} \dots\dots(5)$$

この式を整理すると、

$$f \left( H \cos \theta - \frac{L}{2} \sin \theta \right) \geq mg \left( H \sin \theta + \frac{L}{2} \cos \theta \right) \dots\dots(6)$$

内軌側の車輪が浮き上がるための最小の車両速度(限界速度)は、この式(6)にて等号が成り立つ時の速度であるから、それを  $V_R$  とすると以下の式(7)が成り立つ。

$$V_R^2 \left( H - \frac{L}{2} \tan \theta \right) = gr \left( H \tan \theta + \frac{L}{2} \right) \dots\dots(7)$$

この式を整理すると、 $V_R$  は以下の式(8)で表される。

$$V_R = \sqrt{gr \left( \frac{H \tan \theta + \frac{L}{2}}{H - \frac{L}{2} \tan \theta} \right)} \dots\dots(8)$$

線路が水平な地面にある(即ち、カントがゼロ)ならば、車両の速度  $V$  が次の式(9)を満たす時に内軌側の車輪が浮き上がることになる。

$$V \geq \sqrt{gr \frac{L}{2H}} \dots\dots(9)$$

式(3)により、 $\tan \theta = 1/\mu$  であれば、 $V_S =$  であるから、車両速度がいかに大きくなってても車両が滑らないこと、また、式(8)により、 $\tan \theta = 2HL$  であれば  $V_R =$  であるから、車両速度がいかに大きくなってても車両が傾かないこと、が推測される。

しかし、レールと車輪との接触における摩擦係数である  $\mu$  の値は、通常 0.2~0.3 であるから、 $V_S =$  となる条件は、(3)式にて  $\tan \theta = 1/\mu$  とすれば、 $\theta = 73.3 \sim 78.7^\circ$  となるから、これは現実の鉄道線路ではあり得ない。

また、通常は  $L = 1.067 \text{ m}$  (新幹線では 1.435 m) であり、レール面から車両の屋根までの高さが約 4 m であることから、乗客を含む車両の重心 G のレール面からの高さを  $H = 2 \text{ m}$  と仮定すると、 $V_R =$  となる条件は、(8)式にて  $\tan \theta = 2HL = 4.0$  により、 $\theta = 76^\circ$  となり、これも現実の鉄道線路ではあり得ない。

カーブにおいて鉄道車両が速度を上げていった時に、車両は外軌側へ横滑りするのかわ、それとも、内軌側の車輪が浮き上がって車両は外側へ傾くのだろうか。

車輪のフランジの角度が通常  $60 \sim 70^\circ$  (直角ではなく)であるために、カーブにおいては、外軌側車輪のフランジ面がレールの肩に接

触しつつ上向きの摩擦力を受けて走行する「せり上がり」(または「乗り上がり」)の場合と、フランジが横方向からの力(この最大の要因が遠心力である)を受けて、下向きの摩擦力を受つつもレールの肩に「滑り上がる」場合とに分けて、鉄道技術者の間では技術的な検討がなされている。いずれの場合も、それらが過度に進めば車両の脱線に至るために、実車による様々な実験と測定が行なわれている。

しかし、ここでは、現象を単純化し、車輪のフランジ面が外軌側レールの側面に接触し、レールの肩に「せり上がり」ながらも車輪の脱線にまでは至らないとする場合について、カーブにおいて車両が滑るのか、傾くのかを、式(3)と(8)で表される  $V_S$  と  $V_R$  の大小比較により考察してみよう。それには次の式(10)の正負を調べればよい。

$$V_S^2 - V_R^2 = gr \left( \frac{\tan \theta + \mu}{1 - \mu \tan \theta} - \frac{H \tan \theta + \frac{L}{2}}{H - \frac{L}{2} \tan \theta} \right) \dots\dots\dots(10)$$

通常は  $\tan \theta < 0.1$  であり  $\mu = 0.2 \sim 0.3$  ,  $H \cong 2 \text{ m}$  ,  $L \cong 1.07 \text{ m}$  であることを考慮して 式(10)の右辺の括弧内を計算すると、分母が常に正であるから、次の式(11)で表される分子の正負のみを調べればよい。

$$\left( \mu H - \frac{L}{2} \right) (\tan^2 \theta + 1) \dots\dots\dots(11)$$

即ち、  
 $H > L/(2\mu)$  ならば  $V_S > V_R$  ...車輪が外側へ滑る前に車両が傾く(内側の車輪が浮く)。  
 $H = L/(2\mu)$  ならば  $V_S = V_R$  ... 車輪が外側へ滑る時と車両が傾く時が同時である。  
 $H < L/(2\mu)$  ならば  $V_S < V_R$  ...車両が傾く前に車輪が外側へ滑る。

一例として、線路カーブの曲率半径:  $r = 300 \text{ m}$  , 線路のカント:  $9.7/107 = 0.091$  (よって傾斜角度  $\theta = 5.2^\circ$ ) , レールの間隔:  $L = 1.067 \text{ m}$  とする。ここで、レールと車輪との摩擦係数を  $\mu = 0.2$  とすると  $L/(2\mu) \cong 2.7 \text{ m}$  ,  $\mu = 0.25$  とすると  $L/(2\mu) \cong 2.1 \text{ m}$  ,  $\mu = 0.30$  とすると  $L/(2\mu) \cong 1.8 \text{ m}$  となる。即ち、乗客を含む車両の重心の高さ(レールからの高さ:  $H$ )が、これらの値よりも大きいか小さいか、が車両の挙動を左右することになる。

乗客のいない空車について、 $H = 1.3 \text{ m}$  (ホームの高さ程度)であるとすれば、 $\mu = 0.2 \sim 0.3$  の場合には、カーブにおいて速度を上げていくと、常に、車両が傾く以前に車輪が外側へ滑り、外軌レールに車輪が乗りあがって脱線に至ることになる。

一方、乗客が存在すれば車両の重心は、通常、車両の床よりも上に位置するから、 $H$  の値はより大きくなる。もちろん、乗客の乗車率によっても  $H$  は変化する。 $H$  の値と内軌側の車輪が浮き上がる限界車両速度  $V_R$  の関係を式(8)により求めると表1のようになる。

表1

重心の高さと  $V_R$

$H \text{ (m)}$	$V_R \text{ (km/h)}$
1.2	148
1.3	143
1.4	138
1.5	134
1.6	131
1.7	128
1.8	125
1.9	122
2.0	120

$\mu = 0.25 \sim 0.30$  である時には、式(11)により、例えば、 $H = 2.0 \text{ m}$  とすると、120 km/h 以上の速度では、脱線の前に、車両は滑る以前に外側へ傾くことになる。

実際には、車両の下のバネ系も車両の挙動に作用するから、カーブを走行中には車両速度に応じて、カントや  $H$  の値が幾分変動する

であろう。そのため、脱線に至る車両速度の推定も容易ではないであろう。

カーブにおいて、ひとたび内軌側車輪が浮き上がれば、車両の傾斜角度が増すにしたがって、遠心力による車両の重心に対する外側への回転モーメントが増大するために、車両速度が急低下しない限り、脱線や横転に至ることになる。

内軌側の車輪が浮き上がって車両が外側へ傾き、外軌側の車輪のみで走行している時に非常ブレーキをかけた場合には、運動量を有する車両の重心の位置が外軌レールの鉛直線上にはないために、角運動量の保存則により、外軌レールの肩とフランジとの接点（図1のA点）を中心とする角運動量が車両に発生し、進行方向に対してカーブの外側方向への大きな回転力が生ずることになる。これは車両に働く、いわゆる首振り（Yawing）に類似する力である〔遠心力は車両に働く回転（Rolling）力に相当する〕。それがカーブにおける非常ブレーキの作用を含む場合の車両の挙動の解析を難しくしている。さらにまた、通常車両が複数連結であるために、車両全体の挙動の解析は一層難しくなっている。鉄道技術の研究課題が奥深い所以である。鉄道技術者達の努力に深く感謝し、今後の成果を期待したい。

鉄道車両の脱線の可能性は、通常、車輪にかかる荷重（輪重） $P$ と車輪のフランジに横方向から働く力 $Q$ との比 $Q/P$ で表される「脱線係数」の値により評価されている。

走行中の車両の $Q/P$ の値が、式(12)で表される「ナダルの式」と呼ばれる限界脱線係数の約80%を超えると脱線の可能性が高いとされている。

$$\frac{Q}{P} = \frac{\tan \alpha - \mu}{1 + \mu \tan \alpha} \dots\dots(12)$$

（ $Q$ : 車輪のフランジに横方向から働く力、 $P$ : 車輪に鉛直方向にかかる荷重（輪重）、 $\mu$ : フランジ面とレールの肩との接触点における摩擦係数、 $\alpha$ : 車輪のフランジ角度）

通常車輪ではフランジ面がほぼ平面に近く、また $0 < \alpha < \pi/2$ であるから、フランジの角度 $\alpha$ を大きくするほど限界脱線係数が大きくなり、脱線しにくくなる。しかし、仮に、車輪のフランジ面が顕著な凹形曲面であり、レールの肩にかぶさるような形状であれば、ナダルの式とは全く異なる限界脱線係数が生まれてこよう。

なお、式(12)では、カーブにおいて車両に働く遠心力が $Q$ の値の中に含まれているために、脱線に至るまでの車両速度との関連が直接には分かりにくい。

そこで、この限界脱線係数を $D$ とおき、カーブにおける外軌側車輪にかかる輪重が車両の全重量の $1/n$ であるとすれば、 $P = mg/n$ および遠心力の式(1)より、脱線の限界速度 $V_D$ は以下の式(13)で表される。

$$V_D = \sqrt{\frac{Dgr}{n}} \dots\dots(13)$$

例えば、 $\alpha = 62^\circ$ 、 $\mu = 0.3$ とすると、 $D \cong 1$ となるから、式(13)にて、脱線の可能性が高いとされる $D = 0.8$ とし、 $r = 300 \text{ m}$ 、 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とすると、外軌側車輪の輪重が車両重量の $1/2$ であれば、脱線の危険速度としては、 $V = 123.5 \text{ km/h}$ 、 $1/3$ であれば $V = 100.8 \text{ km/h}$ 、 $1/4$ であれば $V = 87.3 \text{ km/h}$ となる。

ともあれ、脱線係数を用いた車両の脱線限界速度も、式(4)と同様に、カーブにおける線路の曲率半径の平方根に比例すること、また、式(11)により、乗客を含む車両の重心の高さが車両の傾斜（内軌側車輪の浮き上がり）の重要な要因であることが分かる。

鉄道車両の運動の詳細については、それぞれの専門分野の技術者と研究者による多くの優れた研究報告があるが、本稿のように、単純化されたモデルを用いた初等力学による考察であっても、カーブにおける車両の挙動と脱線速度の概略を知るには有効であると考えられる。

#### 参考資料

- (1) 鉄道総合技術研究所の車両運動研究室  
<http://www.rtri.or.jp/rd/openpublic/rd41/dynamics/index.html>
- (2) 金沢工大機械工学科の永瀬研究室の HP  
<http://www2.kanazawa-it.ac.jp/knl/>
- (3) 芝浦工大土木工学科の松浦研究室の HP  
<http://www.db.shibaura-it.ac.jp/~matsuura/>
- (4) 新潟大学機械工学科の谷藤研究室の HP  
<http://tanifuji.eng.niigata-u.ac.jp/>

(2005 年 6 月)